

**PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS,
CINEMÁTICA E APLICAÇÕES**



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Reitor

ANTONIO JOSÉ DE ALMEIDA MEIRELLES

Coordenadora Geral da Universidade

MARIA LUIZA MORETTI



Conselho Editorial

Presidente

EDWIGES MARIA MORATO

ALEXANDRE DA SILVA SIMÕES – CARLOS EDUARDO ORNELAS BERRIEL
CARLOS RAUL ETULAIN – CICERO ROMÃO RESENDE DE ARAUJO
DIRCE DJANIRA PACHECO E ZAN – IARA BELELI – MARCO AURÉLIO CREMASCO
PEDRO CUNHA DE HOLANDA – SÁVIO MACHADO CAVALCANTE

Luiz Carlos Marcos Vieira Junior

PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS, CINEMÁTICA E APLICAÇÕES

EDITORIA UNICAMP

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO
SISTEMA DE BIBLIOTECAS DA UNICAMP
DIRETORIA DE TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO
Bibliotecária: Maria Lúcia Nery Dutra de Castro – CRB-8ª / 1724

V673p Vieira Junior, Luiz Carlos Marcos
 Príncpio dos trabalhos virtuais, cinemática e aplicações / Luiz Carlos Marcos Vieira
 Junior. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2021.

1. Cinemática. 2. Teoria das estruturas – Métodos matriciais. 3. Engenharia civil.
4. Engenharia de estruturas. I. Título.

CDD 531.112
624.171
642
624.1

ISBN 978-65-86253-83-2

Copyright © by Luiz Carlos Marcos Vieira Junior
Copyright © 2021 by Editora da Unicamp

Opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas
neste livro são de responsabilidade do autor e não
necessariamente refletem a visão da Editora da Unicamp.

Direitos reservados e protegidos pela lei 9.610 de 19.2.1998.
É proibida a reprodução total ou parcial sem autorização,
por escrito, dos detentores dos direitos.

Impresso no Brasil.
Foi feito o depósito legal.

Direitos reservados a

Editora da Unicamp
Rua Sérgio Buarque de Holanda, 421 – 3ª andar
Campus Unicamp
CEP 13083-859 – Campinas – SP – Brasil
Tel./Fax: (19) 3521-7718 / 7728
www.editoraunicamp.com.br – vendas@editora.unicamp.br

Este livro é dedicado a minha esposa, Stefanie Maria Lopez Falconi, que, com muito carinho e amor, apoia e compreende incondicionalmente minha dedicação ao ensino.

Agradecimentos

Somente foi possível construir este livro porque tenho encontrado na minha jornada muitas pessoas especiais e dispostas a me ajudar. Foram tantos os que me auxiliaram, que certamente esquecerei de mencionar alguém, pelo que, desde já, peço desculpas.

Início os meus agradecimentos pelo professor Roberto Buchaim, que me ensinou o tópico deste livro pela primeira vez, quando eu era aluno de Engenharia Civil; o professor Roberto Buchaim também me ajudou a revisar parte deste trabalho e fez vários comentários muito importantes. Outro professor que me ajudou demais foi Philippe Devloo, ensinando-me sobre a equivalência entre o Princípio dos Trabalhos Virtuais e as relações diferenciais de equilíbrio, assim como o método para determinar linha de influência usando análise matricial. Muitos dos exemplos deste livro foram construídos para provas que aplicamos durante o curso de Teoria das Estruturas na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp); nossa parceria no ensino já dura sete anos e continuo aprendendo com ele. Agradeço ao professor Francisco Antonio Menezes, que me forneceu muito material sobre o tópico apresentado, com exercícios excelentes que serviram de base para alguns dos exemplos que aqui aparecem. Apesar de não o ter conhecido, agradeço ao professor José Luiz F. de Arruda Serra por ter redigido notas de aula enquanto lecionava na Unicamp; estas me ajudaram a entender como estava sendo ensinado o tema da linha de influência nessa Universidade; as informações documentadas foram de grande valia para construir este texto e apresentar exemplos; inclusive, a tabela de integrais encontrada no Apêndice A foi compilada por ele e a considero muito boa e bem direcionada à resolução dos problemas usuais. Agradeço aos professores Edson Denner Leonel e Rodrigo Ribeiro Paccola, que me ajudaram na revisão do Capítulo 1. Também agradeço aos professores Gustavo Henrique Siqueira e Saulo José de Castro Almeida pelo apoio constante na carreira como docente na Unicamp.

Agradeço aos meus colegas engenheiros e engenheiras estruturais que sempre me desafiam a apresentar um sistema estrutural mais interessante. Continuo achando esse o grande desafio deste profissional. Sobretudo agradeço ao meu amigo engenheiro Marlos Mangini, que sempre tem um tempo para me ensinar, ouvir e discutir estruturas; a palavra "aplicações" no título eu devo a você.

Agradeço a cada aluno que me perguntou durante as aulas; eu aprendi com vocês a ser mais claro na forma como ensino; também notei as falhas na lógica necessária para aprender este conteúdo. Muitos alunos me ajudaram na confecção deste texto, sobretudo aqueles do Risk Engineering Laboratory (RELab). Rafaela Matiazzo Peixoto, Ingrid Rocio Irreño Palomo e Oscar Javier Garcia Carvajal me ajudaram a digitalizar as primeiras notas de aula. Natalia Reggiani Manzo me auxiliou a colocar o texto em ordem e revisar. Rodrigo Gianini Mamone trabalhou ao meu lado na demonstração matemática do método gráfico de Winkler. Anderson Vinha Pires me ajudou demais com a clareza do texto, a confecção dos exemplos e as derivações. Bruno Fernandes foi essencial na construção do esqueleto do Capítulo 3 e do Apêndice C. Valéria Stroebel Bertelle foi quem me auxiliou

a estruturar o Capítulo 4 e a programar os exemplos. Marina Corona Cosmo elaborou e revisou todas as figuras deste livro, dois anos de muito esforço e persistência.

Por fim, agradeço a minha família, que entendeu minha ausência e minha dedicação para escrever um livro que nunca acabava. Sinceramente, nunca acaba, mas em algum momento precisava lançar a primeira edição.

Sumário

Prefácio	13
Lista de Símbolos e Abreviaturas	15
1 Princípio dos Trabalhos Virtuais	19
1.1 Introdução	19
1.2 Princípio da Conservação de Energia	19
1.2.1 Trabalho de Carregamento Externo (W)	19
1.2.2 Energia de Deformação (U)	20
1.2.3 Representação gráfica do PTV	23
1.3 Equivalência entre PTV e relações diferenciais de equilíbrio	27
1.3.1 Relações diferenciais de equilíbrio em barras	27
1.3.2 Formulação fraca das relações diferenciais de equilíbrio em barras	28
1.4 Exemplo de aplicação	31
1.5 Formulação compacta do PTV	33
1.6 Aplicação do PTV a corpos deformáveis	33
1.6.1 Exemplo: Viga biapoiada	33
1.6.2 Exemplo: Pórtico isostático	35
1.7 Exercícios	42
2 Aplicação do PTV em Vigas	45
2.1 Introdução	45
2.2 PTV aplicado a corpos rígidos	45
2.3 Linha de Influência pelo PTV para corpos rígidos	47
2.4 Definição de Centro Absoluto e Centro Relativo	52
2.5 Determinação da LI de uma Viga Gerber	55
2.5.1 LI de R_{VA}	56
2.5.2 LI de R_{VB}	57
2.5.3 LI de Q_S	57
2.5.4 LI de $Q_{B,esq}$	58
2.5.5 LI de $Q_{B,dir}$	59
2.5.6 LI de Q_α	60
2.5.7 LI de M_S	60
2.5.8 LI de M_B	61
2.6 Aplicações de LI	62

2.7	Determinação da posição crítica do carregamento	63
2.7.1	Exemplo de aplicação do método de Winkler	71
2.7.2	Determinação da posição crítica de um carregamento uniformemente distribuído	74
2.7.3	Exemplo de aplicação prática de LI	75
2.8	Envoltória de esforços	79
2.9	LI para Vigas Hiperestáticas	86
2.10	Determinação de LI por superposição	92
2.11	Exercícios	96
3	Aplicação do PTV em Pórticos	99
3.1	Introdução	99
3.2	Cadeia cinemática de pórticos	99
3.3	Exemplos da aplicação do PTV a corpos rígidos	100
3.3.1	Exemplo 1: Aplicação do PTV a corpos rígidos	101
3.3.2	Exemplo 2: Aplicação do PTV a corpos rígidos	108
3.4	Determinação de LI de pórticos isostáticos	116
3.4.1	Exemplo 1: Determinação de LI de pórticos isostáticos	116
3.4.2	Exemplo 2: Determinação de LI de pórticos isostáticos	123
3.5	Exemplo prático de aplicação de LI	128
3.5.1	Exemplo 1: Aplicação de LI	128
3.5.2	Exemplo 2: Aplicação de LI	130
3.6	Exercícios	142
4	Análise Matricial e Cinemática	145
4.1	Introdução	145
4.2	Matriz de rigidez	145
4.2.1	Coefficientes de rigidez axial de barra	148
4.2.2	Coefficientes de rigidez à flexão de barra	150
4.2.3	Coefficientes de rigidez de barra de pórtico	151
4.3	Exemplos Resolvidos Utilizando Análise Matricial	152
4.3.1	Resolução de Viga Utilizando Análise Matricial	153
4.3.2	Resolução de Pórtico Utilizando Análise Matricial	155
4.4	Determinação de LIs em Vigas por Análise Matricial	158
4.4.1	Determinação de LIs de uma Viga Biapoiada Isostática	158
4.5	Resumo do método	167
4.6	Determinação de LIs de Pórtico Isostático	168
4.6.1	LI de M_B	168
4.6.2	LI de $N_{B,dir}$	173
4.6.3	LI de Q_C	178
4.6.4	LI de $Q_{D,esq}$	183
4.7	Determinação de LI de uma Viga Hiperestática	187
4.7.1	LI de Q_C	187
4.8	Determinação de LIs de um Pórtico Hiperestático	190

4.8.1	<i>LI</i> de M_B	190
4.8.2	<i>LI</i> de $N_{B,esq}$	193
4.8.3	<i>LI</i> de $Q_{B,esq}$	196
4.9	Exercícios	200
Apêndice A Tabela de integrais do produto de duas funções		201
Apêndice B Pequenos deslocamentos		203
Apêndice C Posição crítica do carregamento no <i>FTOOL</i>		207
C.1	Manipulação de arquivos	208
C.2	Criação e manipulação da estrutura	209
C.3	Criação e atribuição das propriedades	210
C.4	Criação e atribuição do carregamento	213
C.5	Análise dos resultados	214
Referências Bibliográficas		217

Prefácio

Há dez anos eu ensino o tópico abordado neste livro. Durante os dois primeiros anos de minha carreira como docente, lecionei na University of New Haven nos EUA e este curso era ministrado no quinto semestre, após os cursos de resistência dos materiais; vale lembrar que, nos EUA, o curso de Engenharia Civil tem quatro anos de duração e este curso era apresentado com o título de Structural Analysis. Eu achava que o tempo disponível para ensinar este tópico era muito curto, apesar de os alunos estudarem bastante fora da sala de aula. Em 2013, eu comecei a lecionar o mesmo tópico para os alunos de Engenharia Civil da Unicamp, onde o curso é dado no sexto e no sétimo semestres, com o título de Teoria das Estruturas 1 e 2. O curso na Unicamp é bem focado no aprendizado do tópico deste livro. Eu apoio essa estratégia de ensino, pois acredito que os outros tópicos abrangidos nesses cursos – *e.g.*, Métodos dos Deslocamentos e Método das Forças – são consequências do Princípio dos Trabalhos Virtuais, e, portanto, uma base sólida irá facilitar o entendimento de outros tópicos.

Eu considero que existem duas abordagens possíveis para explicar o tópico deste livro: (i) dado um fenômeno físico, buscar apresentar equações que descrevam esse fenômeno; e (ii) dado um sistema de equações e condições do problema em análise, identificar o fenômeno físico que reflete a solução desse sistema de equações. Intencionalmente, apresento o tópico deste livro a partir da primeira abordagem. O professor Philippe e eu discutimos bastante as duas opções, e compreendo os argumentos a favor e contra essa decisão. Minha impressão é que o aluno de Engenharia Civil prefere entender o fenômeno físico para depois entender os conceitos matemáticos envolvidos. Acredito que a resistência ao aprendizado é menor quando o aluno consegue visualizar a solução do problema; depois desse primeiro passo, ele fica motivado a entender os conceitos matemáticos. No entanto, cabe a cada docente complementar o que é apresentado neste livro com o que julgar necessário. O objetivo é que o aluno aprenda.

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

Letras romanas minúsculas

<i>b</i>	base
<i>d</i>	deslocamento, deslocabilidade
<i>f</i>	esforço interno, flecha
<i>g</i>	carregamento permanente
<i>h</i>	altura
<i>ℓ</i>	comprimento
<i>n</i>	número
<i>p</i>	carregamento distribuído, carregamento axial distribuído
<i>q</i>	carregamento distribuído, carregamento transversal distribuído, carga acidental
<i>t</i>	tempo, instante
<i>u</i>	deslocamento no eixo do elemento
<i>v</i>	deslocamento perpendicular ao eixo do elemento, ordenada, distância
<i>x, y, z</i>	coordenadas
<i>aa</i>	coordenadas

Letras romanas maiúsculas

<i>A</i>	área
<i>C</i>	centro de rotação absoluto (C_i) ou relativo ($C_{i,j}$)
<i>D</i>	deslocabilidade, flecha

E	módulo de elasticidade
F	força externa
G	módulo de elasticidade transversal
I	momento de inércia
L	comprimento
M	momento fletor
N	esforço axial, esforço normal, função de forma
P	coeficiente de rigidez
P	força, carregamento
Q	esforço cortante
R	reação, incógnita
T	momento torçor
U	energia de deformação interna
V	volume
W	trabalho da força externa

Letras gregas minúsculas

α	ângulo, ponto
β	ângulo, ponto, termo de carga
δ	deslocamento
ϵ	deformação
η	ordenada da LI
θ	rotação, ângulo
ν	coeficiente de poisson
π	área
ρ	recalque
σ	tensão normal
τ	tensão tangencial

ϕ rotação

χ fator de forma

ω ângulo

Letras gregas maiúsculas

Δ variação, deslocamento

Π valor máximo

Σ somatório

Índices romanos minúsculos

h horizontal

i, j, n, m número

v vertical

x, y, z coordenadas

Índices romanos maiúsculos

$A, B, C \dots$ estruturas, pontos, apoios, barras

E externo

H horizontal

M relativo ao momento fletor

Q relativo ao esforço cortante

R resultante

V vertical

Índices numéricos

1, 2, 3... trechos, números

$I, II, III \dots$ numeração dos corpos rígidos de uma cadeia cinemática

Abreviaturas

dir direita

dist distância

esq esquerda

<i>ext</i>	externo
<i>FE</i>	fator de escala
<i>int</i>	interno
<i>LI</i>	linha de influência
<i>max</i>	máximo
<i>min</i>	mínimo
<i>NA</i>	não aplicável
<i>PDV</i>	princípio das forças virtuais
<i>PDV</i>	princípio dos deslocamentos virtuais
<i>PTV</i>	princípio dos trabalhos virtuais
<i>TV</i>	trabalho virtual

CAPÍTULO 1

Princípio dos Trabalhos Virtuais

1.1 Introdução

No século XVIII, Johann Bernoulli, em uma carta para Pierre Varignon, foi o primeiro a enunciar formalmente o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) [1]; desde então, o PTV é considerado uma das mais importantes descobertas da Mecânica das Estruturas. O PTV é usualmente apresentado na literatura técnica a partir do princípio da conservação de energia que é, de certa forma, intuitivo, mas que pode conduzir o leitor a não entender a total abrangência da aplicação do PTV. Neste capítulo, a apresentação do PTV a partir do princípio da conservação de energia é feita de forma gráfica. Em seguida, demonstra-se que o PTV é simplesmente equivalente às relações diferenciais de equilíbrio. O autor acredita que essa demonstração traz um melhor entendimento do PTV e facilita amplificar a sua aplicação aos problemas de engenharia estrutural.

1.2 Princípio da Conservação de Energia

No século XVIII, ao afirmar que “Nada se cria, tudo se transforma”, Lavoisier eternizou o conceito de conservação de energia que seria utilizado em vários campos da ciência e, também, pela engenharia de estruturas. Como a energia de um sistema elástico é conservada, todo o trabalho exercido por carregamentos externos, W , é armazenado internamente em um corpo por meio de deformação. Um exemplo simples é o de uma mola que se deforma quando um carregamento é aplicado. Ao se deformar, a mola armazena a energia que lhe foi conferida pelo trabalho de uma força externa, a qual, em um sistema conservativo, pode ser restaurada ou transferida para outro corpo.

1.2.1 Trabalho de Carregamento Externo (W)

O trabalho de um carregamento é definido pelo produto escalar do vetor de forças ou momentos externos pelo vetor de deslocamentos ou rotações. A fim de evitar repetição

excessiva, neste texto, serão utilizados os termos deslocamento e força externa para, também, fazer referência a rotação e momento.

Considere o exemplo clássico de um bloco com uma certa massa sendo puxado por um tirante indeformável ao qual é aplicada uma força externa, Fig. 1.1a. Basta que a força externa, F , seja maior que a força de atrito do bloco com a superfície, F_{atrito} , para que o bloco entre em movimento, Fig. 1.1b. Como a força externa, F , não varia com o deslocamento, D , o trabalho da força é dado pelo produto da força pelo deslocamento, D ; essa relação pode ser apresentada de forma gráfica como na Fig. 1.1c. Note que a energia inserida no sistema pela força externa é utilizada para superar o atrito, mas não é conservada por meio da deformação do corpo, como no exemplo da mola.

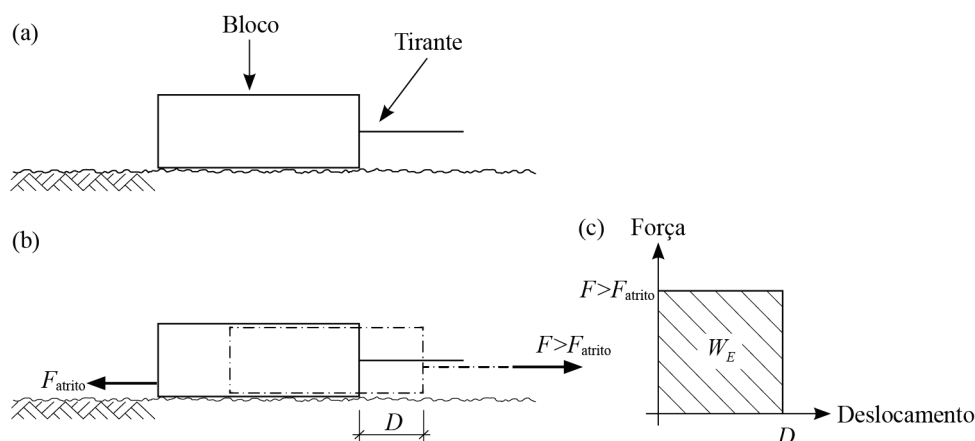


Figura 1.1: Trabalho da força externa aplicada sobre corpo indeformável

Como exemplo de corpo deformável considere uma mola de translação em repouso, ou seja, no instante t igual a 0, a força axial F é nula, $F = 0$, sendo que uma força externa é aplicada gradativamente até atingir o valor F_n em um instante qualquer $t = n$. Note também que um acréscimo de F será acompanhado por um acréscimo do deslocamento, D , Fig. 1.2a. Gráficamente, o trabalho da força externa pode ser entendido como a soma de uma sucessão de infinitésimos de força e deslocamento, ou simplesmente pela integral da função que define a relação entre força e deslocamento, Fig. 1.2b. Um caso especial é quando a relação entre força e deslocamento é linear, e então o resultado da integral dessa função é dado pelo produto da força pelo deslocamento dividido por 2, ou seja, a área do triângulo definido abaixo da relação força e deslocamento, Fig. 1.2c. Note a diferença de cálculo de W , considerando-se um corpo deformável ou indeformável.

1.2.2 Energia de Deformação (U)

Entende-se que um elemento de barra pode apresentar deformações oriundas dos esforços internos, a saber, esforço normal, esforço cortante, momento fletor e momento torçor. Ou seja, um elemento é capaz de armazenar energia de deformação referente a todos os esforços internos mencionados. Cada esforço interno é associado a um respectivo deslocamento ou rotação relativa interna de um elemento infinitesimal de comprimento